ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΦΥΣΙΚΗΣ

Κωνσταντίνος Σφέτσος, Καθηγητής Φυσικής
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής & Στοιχειωδών Σωματιδίων,
Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,
Αθήνα, 15784

Απειροσειρές και γινόμενα

Περιεχόμενα (19 Δεκεμβρίου 2017)

Ορισμοί και κριτήρια σύγκλισης

Απειροσειρές εμφανίζονται συχνότατα σε όλους στους κλάδους της Φυσικής και των εφαρμογών της μέσω άλλων επιστημών.
Μια απειροσειρά ορίζεται από το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ , \qquad \text{με την υπόθεση ότι } \lim_{n\to\infty} a_n < \infty \ . \tag{1}$$

Η ακολουθία μιγαδικών, εν γένει, αριθμών a_n καθορίζει τις ιδιότητες σύγκλισής της.

- Μια απειροσειρά είναι συγκλίνουσα αν ισούται με πεπερασμένο αριθμό.
- Είναι απολύτως συγκλίνουσα αν η απειροσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \ . \tag{2}$$

- Αν η (2) αποκλίνει ενώ η (1) συγκλίνει, τότε λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκες.

- Μια σειρά της οποίας οι όροι είναι διαδοχικά θετικοί και αρνητικοί αριθμοί ονομάζεται εναλλασσόμενη. Τότε $a_n = (-1)^n b_n$, όπου b_n θετικοί αριθμοί.

Αν η απειρσοσειρά την οποία μελετούμε δεν μπορεί να υπολογιστεί επακριβώς είναι σημαντικό να γνωρίζουμε αν η σειρά είναι συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα.
Ομαδοποιούμε και παραθέτουμε τα διάφορα κριτήρια σύγκλισης:

Κριτήριο 1: Σύγκριση σειρών μη αρνητικών όρων

Έστω δύο ακολουθίες τέτοιες ώστε $b_n \geqslant 0$ και $a_n \geqslant 0$, $\forall\ n > N$, δηλαδή είναι θετικές από έναν όρο και πέρα.
Ισχύουν τα εξής:

- Αν $a_n \leqslant b_n$, $\forall\ n > N$ και η $\sum_n b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_n a_n$ επίσης συγκλίνει.
- Αν αντιθέτως $a_n \geqslant b_n$, $\forall\ n > N$ και η $\sum_n b_n$ αποκλίνει τότε και η $\sum_n a_n$ επίσης αποκλίνει.

Ως παράδειγμα έστω οι σειρές οριζόμενες απ' τις ακολουθίες

$$a_n = \frac{\ln n}{2n^3 - 1}\ , \qquad b_n = \frac{1}{n^2}\ (\text{συγκλίνουσα})\ ,$$

Έχουμε:

- $\ln n < n$ και $\dfrac{1}{2n^3-1} \leqslant \dfrac{1}{n^3}$.
- Άρα $a_n \leqslant b_n$ και $\sum_n a_n < \infty$.

Κριτήριο 2: Σύγκριση λόγου σειρών μη αρνητικών όρων

Έστω δύο ακολουθίες τέτοιες ώστε

$$a_n \geqslant 0\ , \quad b_n \geqslant 0\ , \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A\ . \tag{3}$$

Ισχύουν τα εξής:

- Αν $A \neq 0, \infty$, τότε οι σειρές $\sum_n a_n$ και $\sum_n b_n$ είναι και οι δύο είτε συγκλίνουσες είτε αποκλίνουσες.
- Αν $A = 0$, τότε αν $\sum_n b_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_n a_n$ συγκλίνει επίσης.

- Αν $A = \infty$, τότε αν $\sum_n b_n$ αποκλίνει τότε και η $\sum_n a_n$ αποκλίνει επίσης.

Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η σύγκριση με τη σειρά $b_n = 1/n^p$. Αν $a_n \sim 1/n^p$ για $n \to \infty$, τότε $\sum_n a_n$ συγκλίνει για $p > 1$ και αποκλίνει για $p \leqslant 1$.
π.χ. για για τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+3}{n^3+2n^2} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} n a_n = 1 \ .$$

Επειδή $p = 1$, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+3}{n^3+2n^2} \ , \tag{4}$$

αποκλίνει.

Κριτήριο 3: Κριτήριο του ολοκληρώματος

Αν $f(x)$ είναι συνεχής, θετική και μονότονα φθίνουσα συνάρτηση για $x \geq N$ και τέτοια ώστε $f(n) = a_n$, $\forall\ n \geqslant N$, τότε η (1) συγκλίνει ή αποκλίνει αν το ολοκλήρωμα

$$\int_N^\infty dx\ f(x)\ , \tag{5}$$

συγκλίνει ή αποκλίνει, αντίστοιχα.

Π.χ. οι σειρές

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{n^2+1}\ , \qquad \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln n}\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty n e^{-n^2}\ ,$$

αποκλίνουν, αποκλίνουν και συγκλίνουν, αντίστοιχα, επειδή το αυτό ισχύει για τα ολοκληρώματα

$$\underbrace{\int_1^\infty dx\ \frac{x}{x^2+1}}_{=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)|_1^\infty=\infty}\ , \qquad \underbrace{\int_2^\infty dx\,\frac{1}{x\ln x}}_{=\ln(\ln x)|_2^\infty=\infty}\ , \qquad \underbrace{\int_0^\infty dx\ x e^{-x^2}}_{=\frac{1}{2}}\ .$$

Κριτήριο 4: Κριτήριο για εναλλασσόμενες σειρές

Μία εναλλασσόμενη σειρά συγκλίνει αν

$$|a_{n+1}| \leqslant |a_n| \ , \quad n \geqslant 1 \qquad \text{and} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ . \tag{6}$$

Ως παραδείγματα τις θεωρούμε σειρές

$$(\alpha) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \ ,$$

$$(\beta) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n} \ ,$$

$$(\gamma) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^4}{(n^2+1)^{5/3}} \ .$$

Οι (α) και (β) συγκλίνουν (υπό συνθήκες) και η (γ) αποκλίνει.

Απ΄ τα παραδείγματα αυτά, αλλά και γενικότερα, προκύπτουν:

- Η εναλλασσόμενη σειρά που αντιστοιχεί σε μιά αποκλείνουσα σειρά θετικών όρων μπορεί να είναι συγκλίνουσα.
- Αν μια σειρά θετικών όρων συγκλίνει η ταχύτητα σύγκλισης της αντίστοιχης εναλλασσόμενης σειράς αυξάνεται.

Κριτήριο 5: Κριτήριο του *D′ Alembert*

- Αν
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant r < 1 \ , \quad \forall \ n > N \ , \tag{7}$$
όπου r ανεξάρτητο του n, τότε η $\sum_n a_n$ συγκλίνει.
- Αν
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \ , \quad \forall \ n > N \ , \tag{8}$$
τότε η $\sum_n a_n$ αποκλίνει.

Μια οριακή περίπτωση του κριτηρίου, έχει ως εξής. Έστω

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \ . \tag{9}$$

- Αν $L < 1$ τότε η $\sum_n a_n$ συγκλίνει.
- Αν $L > 1$ τότε η $\sum_n a_n$ αποκλίνει.

- Αν $L = 1$ το κριτήριο δεν εφαρμόζεται.
  - Σε αυτές τις περιπτώσεις ίσως έχουμε $a_{n+1}/a_n < 1$ για όλα τα πεπερασμένα n, αλλά $\nexists\ r < 1$, ανεξάρτητο του n για αρκετά μεγάλες τιμές του, ώστε πάντα να ικανοποιείται η (7).
  - π.χ. $a_n = 1/n$, $a_{n+1}/a_n = n/(n+1) < 1$, αλλά το όριο πάει στο 1, όταν $n \to \infty$.

Κριτήριο 6: Κριτήριο του *Cauchy* ή κριτήριο της ρίζας

Αν

$$a_n^{1/n} \leqslant r < 1 \ , \forall \ n > N \ , \tag{10}$$

με r ανεξάρτητο του n, τότε η $\sum_n a_n$ συγκλίνει και αν

$$a_n^{1/n} \geqslant 1 \ , \quad \forall \ n > N \ , \tag{11}$$

τότε η $\sum_n a_n$ αποκλίνει.
Μια οριακή περίπτωση του κριτηρίου, έχει ως εξής. Έστω

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = L \ . \tag{12}$$

- Αν $L < 1$ τότε η $\sum_n a_n$ συγκλίνει.
- Αν $L > 1$ τότε η $\sum_n a_n$ αποκλίνει.
- Αν $L = 1$ δεν εφαρμόζεται για λόγους παρόμοιους με αυτούς που παρουσιάστηκαν στο κριτήριο του D' Alembert.

Κριτήριο 7: Κριτήριο του *Kummer*

Έστω a_n και b_n θετικές ακολουθίες. Ισχύουν τα εξής:

- Αν
$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geqslant C > 0 \ , \quad \forall \ n \geqslant N \ , \tag{13}$$
τότε το άθροισμα $\sum_n a_n$ συγκλίνει.
- Αν
$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \leqslant 0 \ , \quad \forall \ n \geqslant N \ , \tag{14}$$
και η $\sum_n b_n^{-1}$ αποκλίνει, τότε το άθροισμα $\sum_n a_n$ αποκλίνει επίσης.

Το κριτήριο συχνά παρουσιάζεται με την οριακή του μορφή υπολογίζοντας πρώτα

$$\lim_{n\to\infty}\left(b_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\right)=C\ . \tag{15}$$

Αν $C>0$ τότε η $\sum_n a_n$ συγκλίνει και αν $C<0$ και η $\sum_n b_n^{-1}$ είναι αποκλίνουσα, τότε και η $\sum_n a_n$ αποκλίνει.

- Η οριακή μορφή του κριτηρίου είναι ισοδύναμη με τις (13) και (14).
- Το κριτήριο δεν εφαρμόζεται αν $C=0$.

Κριτήριο 8: Κριτήριο του *Raabe*

Το κριτήριο αυτό αποτελεί ειδική εφαρμογή του κριτηρίου του Kummer αν χρησιμοποιήσουμε την $b_n = n$. Έχουμε

- Αν
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant P > 1\ , \quad \forall\ n > N\ , \tag{16}$$
τότε το άθροισμα $\sum_n a_n$ συγκλίνει.
- Αν
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1\ , \quad \forall\ n > N\ , \tag{17}$$
τότε το άθροισμα $\sum_n a_n$ αποκλίνει.

Το κριτήριο συχνά παρουσιάζεται με την οριακή του μορφή υπολογίζοντας πρώτα

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = s\ . \tag{18}$$

Η σειρά $\sum_n a_n$ συγκλίνει αν $s > 1$ και αποκλίνει αν $s < 1$, ενώ αν $s = 1$ δεν εφαρμόζεται.

Κριτήριο 9: Κριτήριο του *Gauss*

Αν $a_n > 0$ για όλα τα πεπερασμένα n και

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{h}{n} + \frac{B_n}{n^2} \ , \tag{19}$$

στην οποία B_n είναι φραγμένη συνάρτηση του n όταν το $n \to \infty$.

- Το άθροισμα $\sum_n a_n$ συγκλίνει αν $h > 1$ και αποκλίνει αν $h \leqslant 1$.
- Είναι σημαντικό ότι το κριτήριο αυτό πάντα εφαρμόζεται.
- Η απόδειξή του για $h \neq 1$ στηρίζεται στο κριτήριο του Raabe και για $h = 1$ εφαρμόζοντας το κριτήριο του Kummer για $b_n = n \ln n$.

Διπλές σειρές και επαναδιάταξή τους

Οι διπλές σειρές έχουν τη μορφή

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} \ . \tag{20}$$

Όπως και στην περίπτωση των διπλών ολοκληρωμάτων πολλές φορές συμφέρει να επαναδιατάξουμε τους όρους διπλών σειρών γιατί έτσι μπορεί να είναι ευκολότερο να υπολογιστεί. Παραθέτουμε τις περιπτώσεις:

- Η πρώτη δυνατότητα είναι να κάνουμε την αλλαγή

  $$n = q \geqslant 0 \ , \qquad m = p - q \geqslant 0 \ , \tag{21}$$

  παίρνουμε ότι

  $$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{p} a_{q,p-q} \ . \tag{22}$$

- Μιά δεύτερη δυνατότητα είναι να αλλάξουμε δείκτες ως

$$n = s \geqslant 0 \ , \qquad m = r - 2s \geqslant 0 \ . \tag{23}$$

Τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{[r/2]} a_{s,r-2s} \ . \tag{24}$$

Ο μετασχηματισμός *Sommerfeld–Watson*

Ένας τρόπος υπολογισμού άπειρων σειρών είναι και μέσω της μετατροπής τους σε μιγαδικά ολοκληρώματα. Παραμορφώνοντας τον αντίστοιχο δρόμο μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα και και την άπειρη σειρά. Αυτός είναι ο μετασχηματισμός των Sommerfeld–Watson.

Έστω η συνάρτηση $f(z)$ η οποία:

- Μηδενίζεται γρηγορότερα από $1/|z|$ όταν $z \to \infty$.
- Έχει πεπερασμένο αριθμό πόλων σε σημεία z_k στο μιγαδικό επίπεδο μακριά απ΄ τον πραγματικό άξονα και έστω R_k τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $f(z)$.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τα αθροίσματα:

- $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n = -\pi \sum_k R_k \cot \pi z_k \ . \tag{25}$$

- $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f_n = -\pi \sum_k \frac{R_k}{\sin \pi z_k} \ . \tag{26}$$

Έχουμε θέσει $f_n = f(n)$.

Παράδειγμα υπολογισμού δυναμοσειράς

Υπολογίστε το άπειρο άθροισμα

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2 x^{2n-1}}{(2n-1)!} \ . \tag{27}$$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανάπτυξη του $\sin x$ σε σειρά γύρω από το $x = 0$, η οποία είναι

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \ .$$

Αλλάζοντας δείκτη ως $k = n - 1$ η σειρά (27) γράφεται

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}(1 + 2k + k^2) \ .$$

Γράφοντας τους τρείς όρους ξεχωριστά έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &\quad + x^2 \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} \\ &\quad + \frac{x^2}{4} \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} \\ &= \sin x + x^2 \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{x} + \frac{x^2}{4} \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{x} \\ &= \frac{3}{4} x \cos x + \frac{1}{4}(1 - x^2) \sin x \ , \end{aligned}$$

που είναι και το τελικό αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 1ο σειράς με ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Δείξτε ότι:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2+1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \tanh \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \ . \tag{28}$$

Λύση

Οι πόλοι δίνονται απ′ τις ρίζες της $z^4+z^2+1=0$ και είναι οι

$$z_1 = e^{\pi i/3} \ , \qquad z_2 = e^{2\pi i/3} \ ,$$

καθώς και οι μιγαδικοί συζηγοί τους. Άρα χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Sommerfeld–Watson και την (25) έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2+1} &= -\pi \left(\sum_{k=1}^{2} \frac{\cot \pi z_k}{4z_k^3+2z_k} + \frac{\cot \pi z_k^*}{4z_k^{*3}+2z_k^*} \right) \\
&= \cdots = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \tanh \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \ .
\end{aligned}$$

Οι λεπτομέριες αφήνονται ως [Άσκηση].

Παράδειγμα 2ο σειράς με ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Δείξτε ότι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} \left(1 + \pi a \coth \pi a\right) \ , \tag{29}$$

όπου a πραγματική σταθερά. Πάρτε προσεκτικά το όριο $a \to 0$.

Λύση

Οι πόλοι δίνονται απ΄ τις ρίζες της $z^2 + a^2 = 0$ και είναι απλοί πόλοι στα σημεία $z = \pm ia$. Άρα χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Sommerfeld–Watson και την (25) έχουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\frac{\pi}{ia} \cot i\pi a = \frac{\pi}{a} \coth \pi a \ .$$

Γράφουμε $\sum_{-\infty}^{\infty}(\cdots) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(\cdots) - 1/a^2$ και αποδεικνύουμε το ζητούμενο γιατί $\sum_{-\infty}^{1}(\cdots) = \sum_{1}^{\infty}(\cdots)$.

Για να πάρουμε το όριο $a \to 0$ αναπτύσουμε πρώτα το δεξί μέλος

$$\frac{1}{2a^2}\left(1 + \pi a \coth \pi a\right) = \frac{1}{a^2} + \frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}(a^2)\ .$$

Αφαιρώντας τον όρο με $n = 0$ απ' το αριστερό μέλος βρίσκουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ . \tag{30}$$

Οι λεπτομέριες αφήνονται ως [Άσκηση].

Παράδειγμα 3ο σειράς με ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Δείξτε ότι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} \left(1 + \frac{\pi a}{\sinh \pi a}\right) \ . \tag{31}$$

Πάρτε προσεκτικά το όριο $a \to 0$.

Λύση

Οι πόλοι δίνονται απ' τις ρίζες της $z^2 + a^2 = 0$ και είναι απλοί πόλοι στα σημεία $z = \pm ia$. Άρα χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Sommerfeld–Watson και την (26) έχουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = -\frac{\pi}{ia} \frac{1}{\sin i\pi a} = \frac{\pi}{a} \frac{1}{\sinh \pi a} \ .$$

Όπως και πρίν γράφουμε $\sum_{-\infty}^{\infty}(\cdots) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(\cdots) - 1/a^2$ και αποδεικνύουμε το ζητούμενο γιατί $\sum_{-\infty}^{-1}(\cdots) = \sum_{1}^{\infty}(\cdots)$.

Για να πάρουμε το όριο $a \to 0$ αναπτύσουμε πρώτα το δεξί μέλος

$$\frac{1}{2a^2}\left(1+\frac{\pi a}{\sinh \pi a}\right) = \frac{1}{a^2} - \frac{\pi^2}{12} + \mathcal{O}(a^2) \ .$$

Αφαιρώντας δε τον όρο με $n = 0$ απ' το αριστερό μέλος βρίσκουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \ . \tag{32}$$

Οι λεπτομέριες αφήνονται ως [Άσκηση].

Ο τύπος των *Euler–Maclaurin*

Ο τύπος του Euler–Maclaurin αναδεικνύει με συστηματικό τρόπο τη διαφορά μεταξύ ενός διακριτού αθροίσματος και του αντίστοιχου ολοκληρώματος.

- Έστω η ακολουθία f_k και η αντίστοιχη συνάρτηση $f(k)$.
- Το πεπερασμένο άθροισμα έχει την ασυμπτωτική ανάπτυξη

$$\sum_{k=a}^{b} f_k \sim \int_a^b dk\ f(k) + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right] , \qquad (33)$$

  όπου a και b είναι ακέραιοι και B_{2k} είναι αριθμοί Bernoulli.
- Σε πολλές περιπτώσεις το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί αν και αυτό μπορεί να μην είναι δυνατό για τη σειρά. Άρα τότε η ασυμπτωτική σειρά μπορεί να υπολογισθεί με στοιχειώδεις συναρτήσεις.

- Τα πολυώνυμα Bernoulli ορίζονται απ΄ την ανάπτυξη

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} \ . \tag{34}$$

Οι αριθμοί Bernoulli ορίζονται απ΄ τη σχέση

$$B_n = B_n(0) = B_n(1) \ . \tag{35}$$

Οι πρώτοι εξ΄ αυτών είναι

$$B_0 = 1 \ , \quad B_1 = -\frac{1}{2} \ , \quad B_2 = \frac{1}{6} \ , \quad B_3 = 0 \ , \quad B_4 = -\frac{1}{30} \ , \quad B_6 = \frac{1}{42} \ .$$

- Ως παράδειγμα έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} \sim \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{dn}{(z+n)^2}}_{=1/z} + \frac{1}{2z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{z^{2n+1}} \ . \tag{36}$$

Για $z=1$ πρόκειται για την ασυμπτοτική ανάπτυξη της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$ (Euler 1735).

Άπειρα γινόμενα

Ένα άπειρο γινόμενο ορίζεται ως

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \ , \tag{37}$$

εμφανίζονται δε στη Στατιστική Φυσική, σε γεωμετρικά προβλήματα μαθηματικών, σε θεωρίες πεδίου και χορδών και άλλους κλάδους των θετικών επιστημών.

- Μια συνάρτηση αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο ονομάζεται ολική. Στο άπειρο δεν χρειάζεται να είναι αναλυτική γιατί τότε απ΄ το θεώρημα του Liouville είναι σταθερή. Γενικά στο άπειρο μπορεί να είναι είτε πόλος είτε ουσιώδης ανωμαλία (όπως οι e^z και $\sin z$).
- Έστω $f(z)$ ολική συνάρτηση με μηδενικά που δίνονται απ΄ την άπειρη, μη συγκλίσουσα, ακολουθία a_n, $n = 1, 2, \ldots,$ το καθένα με πολλαπλότητα m_n.

Τότε ισχύει:

$$f(z) = f(0)e^{\frac{f'(0)}{f(0)}\, z} \prod_{n=1} \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{z/a_n} \right]^{m_n} , \qquad (38)$$

η οποία βοηθά να εκφράσουμε απειρα γινόμενα με γνωστές συναρτήσεις.

- Το σημείο $z = 0$ είναι αύθαίρετο αρκεί να μην αντιστοιχεί σε μηδενικό.
- Αν η $f(z)$ είναι μερομορφική συνάρτηση τότε μπορεί να εκφραστεί ως ο λόγος δύο ολικών συναρτήσεων, για καθεμιά απ' τις οποίες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (38).

- Ως παράδειγμα θεωρούμε την $f(z) = \cos z$. Έχουμε $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. Τα μηδενικά της δίνονται απ' την $a_n = (n - \frac{1}{2})\pi$, $n = -\infty, \ldots, 0, 1, \infty$. Χρησιμοποιώντας ότι $a_{-n+1} = -a_n$ βρίσκουμε ότι
$$\cos z = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right) \ .$$
- Άλλα παρόμοια παραδείγματα ([Άσκηση]) είναι:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = \frac{\pi}{\sinh \pi} \ , \qquad \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3} \ .$$

Παράδειγμα υπολογισμού σειρά από άπειρο γινόμενο

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση του υπερβολικού ημιτόνου σε άπειρο γινόμενο,

$$\frac{\sinh x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \ , \tag{39}$$

να αποδειχτεί ότι

$$\coth x - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2+n^2\pi^2} \ . \tag{40}$$

Λύση

Παίρνοντας το λογάριθμο των δύο μερών της (39), καταλήγουμε στην

$$\ln\sinh x - \ln x = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \ .$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση αποδεικνύεται το ζητούμενο.